2. Considerado a t como la variable independiente:

$$s' = \frac{ds}{dt} = -\frac{s^2 - 3ts}{2s^4 - 9ts} = -\frac{\cancel{(s)}(s - 3t)}{\cancel{(s)}(2s^3 - 9t)} = -\frac{s - 3t}{2s^3 - 9t},$$

excepto los puntos que están en la curva $2s^3 - 9t = 0$ y en el eje $t(s = 0)$.

□

Recordemos que la derivada $s'(t)$ es la razón de cambio instantánea de la función $s(t)$. Si $s(t)$ es la posición de un objeto con respecto al tiempo, entonces $s'(t)$ representa la velocidad instantánea de dicho objeto. Así también $s'(t_0)$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $s(t)$ en el punto $[t_0, s(t_0)]$. Este concepto, que se ha visto en el curso de Cálculo Diferencial, nos permitirá trabajar en el siguiente capítulo sobre problemas de crecimiento de poblaciones, mezclas, caída libre, decaimiento radioactivo, aplicaciones geométricas, entre otros, en los cuales se requiere encontrar las soluciones de una ED de primer orden.
A continuación se exponen las técnicas más conocidas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ecuaciones que se requieren para resolver las aplicaciones anteriormente mencionadas.

2.2 Ecuaciones diferenciales de variables separables

El primer tipo de ED que presentamos es el de variables separables, porque con frecuencia se intenta separar las variables de las ecuaciones de dos variables. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.1 *Separar las variables de la siguiente ecuación algebraica* $(x^2 - x)(y^2 + 3) = 2xy$.

▼ Por separar las variables de la ecuación se entiende que, por medio de operaciones algebraicas válidas, se coloquen todas las x de un lado de la igualdad y todas las y del otro lado. En este caso,

$$(x^2 - x)(y^2 + 3) = 2xy \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x} = \frac{2y}{y^2 + 3}.$$

Como explicamos, se han colocado las x del lado izquierdo de la ecuación y las y del lado derecho. □

Ejemplo 2.2.2 *Separar las variables de la siguiente ED* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$.

▼ Para una ED como ésta, separar variables significa que, por medio de operaciones algebraicas válidas, se escriba la ED en la forma:

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx.$$

Entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)} \Rightarrow \frac{y^2 + 3}{y}\,dy = \frac{2x}{x^2 - x}\,dx.$$

Y ahora:

$$g(y) = \frac{y^2 + 3}{y} \quad \& \quad h(x) = \frac{2x}{x^2 - x} \quad \text{con} \quad y \neq 0 \text{ y } x^2 - x \neq 0.$$

Del resultado anterior, se concluye que la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$ es una ED de variables separables.

□

- Una ecuación diferencial $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ es de variables separables si podemos escribirla en la forma:
$$g(y)\,dy = h(x)\,dx\,.$$
El método para resolver una ecuación diferencial de variables separables consiste en integrar esta última igualdad, es decir:
$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \alpha(y) + C_1 = \beta(x) + C_2 \;\Rightarrow\; \alpha(y) - \beta(x) = C_2 - C_1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \phi(x, y) = C\text{, que es la solución general de la ED.}$$
En general, la solución queda definida de manera implícita.
Ilustramos este método con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2.2.3 *Resolver la ecuación diferencial* $y' = \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$.

▼ Separando las variables tenemos:
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; dy = \operatorname{sen} x\,dx\,.$$
Integrando directamente:
$$\int dy = \int \operatorname{sen} x\,dx \;\Rightarrow\; y = -\cos x + C,$$
que es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.2.4 *Resolver la ecuación diferencial* $y' = \operatorname{sen} y$.

▼ Separando las variables tenemos:
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\operatorname{sen} y} = dx\,.$$
Integrando:
$$\int \frac{dy}{\operatorname{sen} y} = \int dx \;\Rightarrow\; \int \csc y\,dy = x + C \;\Rightarrow\; \ln|\csc y - \cot y| = x + C\,.$$
Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita.

□

Ejemplo 2.2.5 *Resolver la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{(x^2-2)(y^2+3)}$.

▼ Separando las variables:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(x^2-2)(y^2+3)} \;\Rightarrow\; \frac{y^2+3}{y}\,dy = \frac{2x}{x^2-2}\,dx\,.$$
Integrando:
$$\int \frac{y^2+3}{y}\,dy = \int \frac{2x}{x^2-2}\,dx \;\Rightarrow\; \int \left(y + \frac{3}{y}\right) dy = \ln|x^2-2| + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} + 3\ln|y| = \ln|x^2-2| + C\,.$$
Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita.

□

Observaciones. En este punto es pertinente aclarar que el uso del valor absoluto en la integral

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|\,y\,| + C$$

es la forma correcta de aplicar esta fórmula de integración. Sin embargo, con cierta frecuencia en las páginas siguientes y en el resto del libro, el lector podrá encontrar varias veces

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$$

Esto se hace por facilidad de escritura o bien por conveniencia, para hacer algunas manipulaciones y conseguir despejar a la variable dependiente en la solución de la ED.

Se supone también que el lector conoce, por sus cursos previos de Cálculo, las convenciones usuales en la manipulación de funciones elementales. Así por ejemplo, al escribir

$$\operatorname{sen} y = f(x) \;\Rightarrow\; y = \operatorname{arcsen}[f(x)],$$

no hace falta insistir que, para que y sea una función bien definida, se debe cumplir $|\,f(x)\,| \leq 1$.

En lo sucesivo omitiremos mencionar explícitamente restricciones tales como que los denominadores deben ser $\neq 0$, que los argumentos del logaritmo deben ser positivos, etc., a menos que se considere necesario.

También para el resto del libro haremos algunas convenciones sobre la constante de integración que se añade en las integrales indefinidas, como por ejemplo, cuando

$$F'(x) = f(x) \quad \text{y cuando} \quad G'(y) = g(y),$$

anotamos, respectivamente:

$$\int F(x)\,dx = f(x) + C \quad \text{y} \quad \int G(y)\,dy = g(y) + C,$$

donde C representa una constante arbitraria; sin embargo si tenemos, por ejemplo:

$$F(x)\,dx = G(y)\,dx,$$

queremos concluir que

$$\int F(x)\,dx = \int G(y)\,dy,$$

o sea

$$f(x) + C_1 = g(y) + C_2.$$

No es necesario usar dos constantes arbitrarias ya que se puede escribir

$$f(x) = g(y) + C,$$

donde C sustituye a $C_1 - C_2$.

De forma similar, en lo que sigue, el lector podrá ver expresiones como $C_1 + C_2 = C$, $C_1 \cdot C_2 = C$, $3C_1 = C$, $e^{C_1} = C$, $\cos C_1 = C$, etc. en las que esencialmente se hace la convención de que la suma, la resta, el producto, la exponencial o cualquier otro valor funcional de una constante es otra constante.

Así por ejemplo, una fórmula como $e^C = C$ no es necesariamente incorrecta al interpretarse como un ejemplo de estas convenciones.

Ejemplo 2.2.6 *Resolver la ecuación diferencial* $y' = 2x\sqrt{y-1}$.

▼ Separando las variables e integrando:

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (y-1)^{-\frac{1}{2}}\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \int (y-1)^{-\frac{1}{2}}\,dy = 2\int x\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(y-1)^{\frac{1}{2}} + C_1 = x^2 + C_2 \Rightarrow 2(y-1)^{\frac{1}{2}} = x^2 + C.$$

Elevando al cuadrado

$$4(y-1) = (x^2+C)^2 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{4}(x^2+C)^2.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma explícita.

□

Ejemplo 2.2.7 *Resolver el PVI* $y' = xy + x - 2y - 2$, *con la condición* $y(0) = 2$.

▼ Para separar las variables, comenzamos factorizando y después integramos:

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) - 2(y+1) = (y+1)(x-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y+1} = (x-2)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int (x-2)\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln(y+1) + C_1 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + C_2 \Rightarrow \ln(y+1) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + C.$$

Para determinar C, consideramos la condición inicial $y(0) = 2$; entonces:

$$\ln 3 = \frac{1}{2}(-2)^2 + C \Rightarrow C = \ln 3 - 2 \Rightarrow \ln(y+1) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \ln 3 - 2.$$

De donde

$$y + 1 = e^{\frac{1}{2}(x-2)^2 + \ln 3 - 2} = e^{\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2}e^{\ln 3} \Rightarrow y = 3e^{\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2} - 1.$$

Esta última expresión representa la solución del PVI.

□

Ejemplo 2.2.8 *Resolver la ED* $(x^2+1)y'\tan y = x$.

▼ Separando las variables e integrando:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}\tan y = x \;\Rightarrow\; \tan y\, dy = \frac{x\,dx}{x^2+1} \;\Rightarrow\; \int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\,dy = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -\ln(\cos y) + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_2 \;\Rightarrow\; -\ln(\cos y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Podemos encontrar la forma explícita de la solución usando propiedades del logaritmo

$$\ln(\cos y)^{-1} = \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + C \;\Rightarrow\; (\cos y)^{-1} = e^{\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C} = e^{\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}e^{C}.$$

Considerando $e^C = C$ y observando que $e^{\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, tenemos:

$$\frac{1}{\cos y} = C(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \sec y = C\sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; y = \operatorname{arcsec}(C\sqrt{x^2+1}).$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma explícita.

□

Ejemplo 2.2.9 *Resolver la ED* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$.

▼ Al separar las variables se obtiene:

$$\frac{y-2}{(y-1)(y+3)}\,dy = \frac{x-2}{(x-1)(x+3)}\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{y-2}{(y-1)(y+3)}\,dy = \int \frac{x-2}{(x-1)(x+3)}\,dx\,.$$

Aplicando fracciones parciales, obtenemos:

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dy}{y-1} + \frac{5}{4}\int\frac{dy}{y+3} = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{5}{4}\int\frac{dx}{x+3}.$$

Multiplicando por 4, e integrando:

$$-\ln(y-1) + 5\ln(y+3) + C_1 = -\ln(x-1) + 5\ln(x+3) + C_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \ln(y+3)^5 - \ln(y-1) = \ln(x+3)^5 - \ln(x-1) + \ln C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \ln\frac{(y+3)^5}{y-1} = \ln\frac{C(x+3)^5}{x-1} \;\Rightarrow\; \frac{(y+3)^5}{y-1} = \frac{C(x+3)^5}{x-1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (y+3)^5(x-1) = C(x+3)^5(y-1).$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita.

□

Ejemplo 2.2.10 *Resolver el PVI* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen} x + e^{2y}\operatorname{sen} x}{3e^y + e^y\cos 2x}$, *con la condición* $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

▼ Comenzamos factorizando para separar las variables e integrar para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x)(1+e^{2y})}{e^y(3+\cos 2x)} \;\Rightarrow\; \frac{e^y}{1+e^{2y}}\,dy = \frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos 2x}\,dx \;\Rightarrow\; \int\frac{e^y\,dy}{1+e^{2y}} = \int\frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos 2x}\,dx.$$

Pero $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$, entonces:

$$\int\frac{e^y\,dy}{1+(e^y)^2} = \int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{3+[2\cos^2 x - 1]} = \int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{2+2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+(\cos x)^2}.$$

Ahora, integrando por sustitución:

$$\arctan e^y + C_1 = -\frac{1}{2}\arctan(\cos x) + C_2 \ \Rightarrow \ \arctan e^y = -\frac{1}{2}\arctan(\cos x) + C.$$

Considerando la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$\arctan e^0 = -\frac{1}{2}\arctan\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + C \ \Rightarrow \ \arctan 1 = -\frac{1}{2}\arctan 0 + C \ \Rightarrow \ C = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, la solución buscada es

$$\arctan e^y = -\frac{1}{2}\arctan(\cos x) + \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow \ 4\arctan e^y + 2\arctan(\cos x) = \pi.$$

Cualquiera de las dos últimas expresiones representa la solución del PVI de forma implícita.

□

Ejemplo 2.2.11 *Resolver la ecuación diferencial* $x^3e^{2x^2+3y^2}\,dx - y^3e^{-x^2-2y^2}\,dy = 0.$

▼ Primero separamos las variables y planteamos las integrales:

$$x^3e^{2x^2}e^{3y^2}\,dx = y^3e^{-x^2}e^{-2y^2}\,dy \ \Rightarrow \ x^3e^{2x^2}e^{x^2}\,dx = y^3e^{-2y^2}e^{-3y^2}\,dy \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int x^2e^{3x^2}\,x dx = \int y^2e^{-5y^2}\,y\,dy.$$

Integrando por partes ambas integrales y usando las siguientes consideraciones

$$u = t^2 \qquad \Rightarrow du = 2t\,dt,$$
$$dv = e^{at^2}t\,dt \ \Rightarrow \ v = \frac{1}{2a}e^{at^2}.$$

Se tiene:

$$\frac{1}{6}x^2e^{3x^2} - \frac{1}{3}\int e^{3x^2}\,x dx = -\frac{1}{10}y^2e^{-5y^2} + \frac{1}{5}\int e^{-5y^2}\,y\,dy \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \frac{1}{6}x^2e^{3x^2} - \frac{1}{18}e^{3x^2} = -\frac{1}{10}y^2e^{-5y^2} - \frac{1}{50}e^{-5y^2} + C.$$

Multiplicando por 450 (mínimo común múltiplo de 6, 18, 10 y 50):

$$(75x^2 - 25)e^{3x^2} + (45y^2 + 9)e^{-5y^2} = C.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita.

□

Ejemplo 2.2.12 *Resolver la ED* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{xy}}.$

▼ Separamos variables factorizando primero y posteriormente integramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}\,\sqrt{y}} = \frac{y+1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{y})} \ \Rightarrow \ \frac{1+\sqrt{y}}{y+1}\,dy = \frac{dx}{\sqrt{x}} \ \Rightarrow \ \int \frac{\sqrt{y}+1}{y+1}\,dy = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx\,.$$

Resolvemos la primera integral mediante el cambio de variable $\sqrt{y} = t$ para así obtener

$$\int \frac{t+1}{t^2+1}2t\,dt = \int \frac{2t^2+2t}{t^2+1}\,dt = \int\left(\frac{2t^2}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1}\right)dt =$$
$$= \int\left(2 - \frac{2}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1}\right)dt = 2t - 2\arctan t + \ln(t^2+1) + C_1.$$

Dado que $t = \sqrt{y}$, resulta:

$$2\sqrt{y} + \ln(y+1) - 2\arctan\sqrt{y} + C_1 = 2\sqrt{x} + C_2 \;\Rightarrow\; 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \ln(y+1) - 2\arctan\sqrt{y} = C.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita.

□

Ejemplo 2.2.13 *Resolver la ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - 3y + x - 3}{xy + 2y - x - 2}$.

▼ Separando variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 3y + x - 3}{xy + 2y - x - 2} = \frac{y(x-3) + (x-3)}{y(x+2) - (x+2)} = \frac{(y+1)(x-3)}{(y-1)(x+2)} \;\Rightarrow\; \frac{y-1}{y+1}\,dy = \frac{x-3}{x+2}\,dx\,.$$

Efectuando las divisiones e integrando:

$$\int\left(1 - \frac{2}{y+1}\right)dy = \int\left(1 - \frac{5}{x+2}\right)dx \;\Rightarrow\; y - 2\ln(y+1) + C_1 = x - 5\ln(x+2) + C_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - \ln(y+1)^2 = x - \ln(x+2)^5 + C.$$

Esta última expresión representa la solución general de la ED en forma implícita.

□

Ejercicios 2.2.1 *Variables separables.* *Soluciones en la página 458*
Resolver las siguiente ecuaciones diferenciales:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \tan x + \sec x\,.$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \tan y\,.$
3. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2}{y}\,.$
4. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{x^2}\,.$
5. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{(2t+1)(2s-1)}{2(t^2+t)}\,.$
6. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{(s^3-s)(4t^3-6t)}{(t^4-3t^2)(3s^2-1)}\,.$
7. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{(u+1)(t+1)}{(u+2)(t-1)}\,.$
8. $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{tu+u+3t+3}{tu+2u-t-2}\,.$
9. $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2\,.$
10. $xy' - y = 2x^2y\,.$
11. $4tx\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1\,.$
12. $(y\ln x)^{-1}\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2\,.$
13. $\dfrac{d\theta}{dt} = (\cos t)(\cos 2\theta - \cos^2\theta)\,.$
14. $\dfrac{dy}{dt} = e^{-2t+3y}\,.$
15. $\dfrac{dy}{dx} + y = yxe^{x+2}\,.$
16. $e^x y\,dy - (e^{-y} + e^{2x-y})\,dx = 0\,.$
17. $2tx^2 + 2t + (t^4+1)x' = 0,$ con $x(0) = 1\,.$
18. $\dfrac{2r-1}{t}\,dr + \dfrac{r-2r^2}{t^2-1}\,dt = 0,$ con $r(2) = 4\,.$
19. $\dfrac{1}{(y-1)^2}\,dx + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dy = 0\,.$
20. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_1)$, con $T(0) = T_0$, donde k, T_0, T_1 son constantes .