2.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden pueden ser lineales o no lineales. En esta sección centraremos la atención en las ED lineales.

- Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = g(x), \text{ donde } \quad a_0(x) \neq 0.$$

- Una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden es de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0, \text{ donde } \quad a_0(x) \neq 0\,.$$

  Observación. En este caso $g(x) = 0$.

Ejemplo 2.3.1 *Mostrar que las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales:*

1. $xy' - y = x^2$.
2. $y^2x' + 2yx = 3y$.
3. $(2y + 1)\,dx + (y^2x - y - x)\,dy = 0$.

▼ Ahora tenemos:

1. $a_0(x) = x, a_1(x) = -1 \;\&\; g(x) = x^2$.
   x es la variable independiente y la variable dependiente es y.
2. $a_0(y) = y^2, a_1(y) = 2y \;\&\; g(y) = 3y$.
   y es la variable independiente y la variable dependiente es x.
3. Realizando algunas operaciones:

$$(2y+1)\,dx + (y^2x - y - x)\,dy = 0 \;\Rightarrow\; (2y+1)\frac{dx}{dy} + y^2x - y - x = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2y+1)\frac{dx}{dy} + y^2x - x = y \;\Rightarrow\; (2y+1)\frac{dx}{dy} + (y^2 - 1)x = y.$$

   Vemos que $a_0(y) = 2y + 1, a_1(y) = y^2 - 1 \;\&\; g(y) = y$.
   y es la variable independiente y la variable dependiente es x.

□

Ejemplo 2.3.2 *Las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales homogéneas:*

1. $xy' - y = 0$.
2. $y^2x' + 2yx = 0$.
3. $(2x + 5)y' + (x^2 - 5)y = 0$.

▼ En estos casos tenemos:

1. $a_0(x) = x, a_1(x) = -1$.
2. $a_0(y) = y^2, a_1(y) = 2y$.
3. $a_0(x) = 2x + 5, a_1(x) = x^2 - 5$.

□

2.3.1 Resolución de la ecuación diferencial lineal homogénea

Para resolver la ecuación diferencial lineal homógenea de primer orden se presentan a continuación dos procedimientos.

Primer procedimiento. La ecuación diferencial $a_0(x)\dfrac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0$ es separable. En efecto:

$$
\begin{aligned}
a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0 \ \Rightarrow a_0(x)\frac{dy}{dx} &= -a_1(x)y \ \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y \ \Rightarrow \ \frac{dy}{y} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx \ \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{dy}{y} &= -p(x)\,dx; \text{ donde } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \text{ y } a_0(x) \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Integrando se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \ \Rightarrow \ & \ln y + C_1 = -\int p(x)\,dx + C_2 \ \Rightarrow \\
& \Rightarrow \ln y = -\int p(x)\,dx + C \ \Rightarrow \ y = e^{-\int p(x)\,dx + C} \ \Rightarrow \ y = e^{-\int p(x)\,dx}e^{C} \ \Rightarrow \\
& \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)\,dx}; \text{ donde } C \text{ es arbitrario.}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3.3 *Resolver la ED:* $x\dfrac{dy}{dx} + x^3y = 0$, *con* $x \neq 0$.

▼ Separando las variables:

$$
x\frac{dy}{dx} + x^3y = 0 \ \Rightarrow \ x\frac{dy}{dx} = -x^3y \ \Rightarrow \ \frac{dy}{y} = -x^2\,dx\,.
$$

Integrando:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} = -\int x^2\,dx \ \Rightarrow \ & \ln y + C_1 = -\frac{x^3}{3} + C_2 \ \Rightarrow \\
& \Rightarrow \ln y = -\frac{x^3}{3} + C \ \Rightarrow \ y = e^{-\frac{x^3}{3}+C} \ \Rightarrow \ y = e^{C}e^{-\frac{x^3}{3}} \ \Rightarrow \\
& \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}\,.
\end{aligned}
$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

Segundo procedimiento. Lo primero que se hace es normalizar la ecuación diferencial, es decir, dividimos la ecuación diferencial entre $a_0(x) \neq 0$ para obtener el coeficiente del término con mayor derivada igual a uno:

$$
\begin{aligned}
a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = 0 \ \Rightarrow & \ \frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = 0 \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \ \Rightarrow \\
\Rightarrow & \ y' + py = 0\,.
\end{aligned}
$$

Como antes, denotamos $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$, con la restrición $a_0(x) \neq 0$.

A continuación se hacen las siguientes consideraciones:

a. Se define
$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}.$$
En este caso no usamos la constante de integración de la integral $e^{\int p(x)\,dx}$ para obtener una función $\mu(x)$ lo más sencilla posible.
Por el teorema Fundamental del Cálculo, al derivar obtenemos:
$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\right) = e^{\int p(x)\,dx}\frac{d}{dx}\left(\int p(x)\,dx\right) = e^{\int p(x)\,dx}\cdot p(x) = \mu p\,.$$
es decir:
$$\mu' = \mu p\,.$$
b. Por otro lado
$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu}{dx} = \mu\frac{dy}{dx} + y\mu p = \mu\left(\frac{dy}{dx} + py\right).$$
Igualdad que se escribe como:
$$(\mu y)' = \mu(y' + py)\,. \tag{2.2}$$

- Para resolver la ecuación diferencial $y' + py = 0$:
  a. Se multiplica la ecuación diferencial por la función $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$:
  $$\mu(y' + py) = 0\,.$$
  b. Se aplica la igualdad anterior (2.2):
  $$(\mu y)' = 0\,.$$
  c. Integrando se obtiene:
  $$\int (\mu y)'\,dx = \int 0\,dx \;\Rightarrow\; \mu y = C \;\Rightarrow\; e^{\int p(x)\,dx}y = C.$$
  d. Por último se despeja la variable y:
  $$y = \frac{C}{e^{\int p(x)\,dx}} \;\Rightarrow\; y = Ce^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

En este procedimiento la función $\mu(x)$ se ha utilizado como factor para poder efectuar la integración y resolver la ecuación diferencial. Por esta razón se dice que $\mu(x)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.3.4 *Resolver la ED:* $x\dfrac{dy}{dx} + x^3y = 0$, *con* $x \neq 0$.

▼ Se normaliza la ED dividiendo entre x:
$$\frac{dy}{dx} + x^2y = 0\,.$$
Vemos que $p(x) = x^2$.
Se calcula un factor integrante $\mu(x)$:
$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} \;\Rightarrow\; \mu = e^{\int x^2\,dx} = e^{\frac{x^3}{3}}\,.$$
Se multiplica por μ la ecuación diferencial y se aplica la igualdad $(\mu y)' = \mu(y' + py)$:
$$e^{\frac{x^3}{3}}(y' + x^2y) = 0 \;\Rightarrow\; \left(e^{\frac{x^3}{3}}y\right)' = 0\,.$$
Al integrar se obtiene:
$$e^{\frac{x^3}{3}}y = C \;\Rightarrow\; y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}\,.$$
Observación. Es el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 2.3.3

□

2.3.2 Resolución de una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden

1. Se normaliza la ecuación diferencial dividiendo entre $a_0(x)$:

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{g(x)}{a_0(x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)\,.$$

   Se considera que $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$ & $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_0(x)}$, donde $a_0(x) \neq 0$.

2. Se calcula un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}\,.$$

3. Se multiplica la ecuación diferencial por la función $\mu(x)$:

$$\mu(y' + py) = \mu f\,.$$

4. Considerando que $(\mu y)' = \mu(y' + py)$ [ver (2.2) en página (47)], se tiene:

$$(\mu y)' = \mu f\,.$$

5. Integrando:

$$\int (\mu y)'\,dx = \int \mu f\,dx \Rightarrow \mu y + C_1 = \int \mu f\,dx + C_2\,.$$

6. Despejando la variable y:

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu f\,dx + \frac{C}{\mu}\,.$$

Se ha obtenido así la expresión de la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\int e^{\int p(x)\,dx} f(x)\,dx + Ce^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Ejemplo 2.3.5 *Resolver la ED* $y' - y = 5$.

▼ En este caso la ecuación diferencial está normalizada. Se tiene que $p(x) = -1$ & $f(x) = 5$.
Se calcula un factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int(-1)\,dx} = e^{-x}\,.$$

Se multiplica la ecuación diferencial por μ y se aplica la igualdad conocida (2.2) de la página 47:

$$\mu(y' + py) = \mu f \Rightarrow (\mu y)' = \mu f \Rightarrow (e^{-x}y)' = e^{-x}5\,.$$

Integrando y despejando a y obtenemos:

$$\int (e^{-x}y)'\,dx = \int e^{-x}5\,dx \Rightarrow e^{-x}y + C_1 = -5e^{-x} + C_2 \Rightarrow e^{-x}y = -5e^{-x} + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -5 + Ce^{x}\,.$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.3.6 *Resolver la ED* $y' - xy = 5x$.

▼ Esta ecuación diferencial está normalizada. En este caso $p(x) = -x$ & $f(x) = 5x$.
Se calcula un factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int (-x)\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Se multiplica la ecuación diferencial por μ y se aplica la igualdad $(\mu y)' = \mu(y' + py)$:

$$(\mu y)' = \mu f \;\Rightarrow\; \left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}5x\,.$$

Integrando y despejando la y, obtenemos:

$$\int \left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right)' dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,5x\,dx \;\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}y + C_1 = -5e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2 \;\Rightarrow\; e^{-\frac{x^2}{2}}y = -5e^{-\frac{x^2}{2}} + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -5 + Ce^{\frac{x^2}{2}}\,.$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.3.7 *Resolver la ED* $xy' + y = 5x^3$, *donde* $x > 0$.

▼ Se normaliza la ED dividiendo entre x:

$$y' + \frac{1}{x}y = 5x^2.$$

En este caso $p(x) = \dfrac{1}{x}$ y $f(x) = 5x^2$.
Se calcula un factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\ln x} = x\,.$$

Se multiplica la ED normalizada por μ y se aplica la igualdad $(\mu y)' = \mu(y' + py)$:

$$(\mu y)' = \mu f \;\Rightarrow\; (xy)' = 5x^3.$$

Integrando y despejando y:

$$\int (xy)'\,dx = \int 5x^3\,dx \;\Rightarrow xy + C_1 = \frac{5}{4}x^4 + C_2 \;\Rightarrow\; xy = \frac{5}{4}x^4 + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x^3 + \frac{C}{x}\,.$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.3.8 *Resolver la ED* $(100 + 2t)y' + y = 7(100 + 2t)$.

▼ Se normaliza la ED dividiendo entre $100 + 2t$:

$$y' + \frac{1}{100 + 2t}y = 7.$$

En este caso $p(t) = \dfrac{1}{100 + 2t}$ & $f(t) = 7$.

Se calcula un factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int \left(\frac{1}{100+2t}\right)dt} = e^{\frac{1}{2}\ln(100+2t)} = e^{\ln(100+2t)^{\frac{1}{2}}} = (100+2t)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Se multiplica la ED normalizada por μ y se aplica la igualdad $(\mu y)' = \mu(y' + py)$:

$$(\mu y)' = \mu f \;\Rightarrow\; \left[(100+2t)^{\frac{1}{2}} y\right]' = 7(100+2t)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Integrando y despejando y, obtenemos:

$$\int \left[(100+2t)^{\frac{1}{2}} y\right]' dt = 7\int (100+2t)^{\frac{1}{2}}\,dt \;\Rightarrow\; (100+2t)^{\frac{1}{2}} y + C_1 = \frac{7}{2}\frac{(100+2t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (100+2t)^{\frac{1}{2}} y = \left(\frac{7}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{3}\right)(100+2t)^{\frac{3}{2}} + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \frac{7}{3}(100+2t) + \frac{C}{(100+2t)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Esta última expresión es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.3.9 *Resolver la ecuación diferencial* $x^2 y' + 3xy = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

▼ Se divide entre x^2 para normalizar la ED:

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}. \tag{2.3}$$

Se calcula el factor integrante:

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln x = \ln x^3 \;\Rightarrow\; \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\ln x^3} = x^3.$$

Se multiplica la ED (2.3) por $\mu(x) = x^3$ y se aplica la igualdad $(\mu y)' = \mu(y' + py)$:

$$x^3\left[y' + \frac{3}{x}y\right] = x^3\frac{\operatorname{sen} x}{x^3} \;\Rightarrow\; [x^3 y]' = \operatorname{sen} x.$$

Integrando:

$$\int [x^3 y]'\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx \;\Rightarrow x^3 y + C_1 = -\cos x + C_2 \;\Rightarrow\; x^3 y = -\cos x + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{C - \cos x}{x^3}.$$

La cual es la solución general de la ecuación diferencial.

□

Ejemplo 2.3.10 *Resolver la ecuación diferencial* $(\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = x(\operatorname{sen} 2x)\cos x$.

▼ Dividiendo entre $\cos x$ para normalizar la ED:

$$y' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}y = \frac{x(\operatorname{sen} 2x)\cos x}{\cos x} \;\Rightarrow\; y' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}y = x(\operatorname{sen} 2x). \tag{2.4}$$

Calculando el factor integrante:

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x) = \ln(\cos x)^{-1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\ln(\cos x)^{-1}} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$$

Multiplicando la ED (2.4) por $\mu(x)$ y aplicando la igualdad $(\mu y)' = \mu(y' + py)$:

$$\frac{1}{\cos x}\left[y' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,y\right] = \frac{1}{\cos x}\,x \operatorname{sen} 2x \;\Rightarrow\; \left[\frac{1}{\cos x}\,y\right]' = \frac{2x \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} = 2x \operatorname{sen} x.$$

De donde

$$\int \left[\frac{1}{\cos x}\,y\right]' dx = \int 2x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Integrando por partes la integral del lado derecho:

$$\frac{1}{\cos x}\,y = -2x\cos x + 2\operatorname{sen} x + C.$$

Por lo tanto la solución general es

$$y = -2x\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + C\;\cos x \;\Rightarrow\; y = -2x\cos^2 x + \operatorname{sen} 2x + C\;\cos x.$$

□

Ejemplo 2.3.11 *Resolver la siguiente ED lineal* $\quad x' + 2yx = y.$

▼ En este caso la ED está normalizada. El factor integrante es

$$\int p(y)\,dy = \int 2y\,dy = y^2 \;\Rightarrow\; \mu(y) = e^{\int p(y)\,dy} = e^{y^2}.$$

Multiplicando la ED normalizada por $\mu(y) = e^{y^2}$ y aplicando la igualdad conocida:

$$e^{y^2}[x' + 2yx] = ye^{y^2} \;\Rightarrow\; \left[e^{y^2}x\right]' = ye^{y^2}.$$

Integrando:

$$e^{y^2}x = \int ye^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}e^{y^2} + C.$$

Por lo tanto la solución general es

$$x = \frac{1}{2} + Ce^{-y^2}.$$

□

Ejemplo 2.3.12 *Resolver la siguiente ecuación diferencial* $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y - x}.$

▼ Considerando a y en función de x, esta ecuación diferencial ordinaria no es lineal; pero si consideramos a x en función de y, se tiene que

$$(e^y - x)\frac{dy}{dx} = 1 \;\Rightarrow e^y - x = \frac{dx}{dy} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x' + x = e^y. \tag{2.5}$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal. Un factor integrante es

$$\int p(y)\,dy = \int dy = y \;\Rightarrow\; \mu(y) = e^y.$$

Entonces multiplicando la ED lineal (2.5) por $\mu(y)$, aplicando la igualdad conocida e integrando:

$$e^y[x' + x] = e^y e^y \ \Rightarrow [e^y x]' = e^{2y} \ \Rightarrow \ \int [e^y x]'\, dy = \int e^{2y}\, dy \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^y x + C_1 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_2 \ \Rightarrow \ e^y x = \frac{1}{2}e^{2y} + C.$$

La solución general de la ED es

$$x = \frac{1}{2}e^y + Ce^{-y}.$$

□

Ejemplo 2.3.13 *Resolver el siguiente PVI* $\quad y' - 2xy = x^3 e^{-x^2}$, *con la condición* $y(0) = 1$.

▼ Se tiene:

$$y' - 2xy = x^3 e^{-x^2}. \tag{2.6}$$

Un factor integrante es

$$\int p(x)\, dx = -2\int x\, dx = -x^2 \ \Rightarrow \ \mu(x) = e^{\int p(x)\, dx} = e^{-x^2}.$$

Multiplicando (2.6) por $\mu(x)$, aplicando la igualdad conocida e integrando, se obtiene:

$$e^{-x^2}[y' - 2xy] = x^3 e^{-x^2} e^{-x^2} \ \Rightarrow [e^{-x^2} y]' = x^3 e^{-2x^2} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int [e^{-x^2} y]'\, dx = \int x^2 e^{-2x^2} x\, dx.$$

Integrando por partes la integral del lado derecho:

$$\int x^2 e^{-2x^2} x\, dx = -\frac{1}{4}x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x^2} x\, dx.$$

Entonces:

$$e^{-x^2} y + C_1 = -\frac{1}{4}x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) e^{-2x^2} + C_2 \ \Rightarrow \ y = -\frac{1}{4}e^{-2x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{x^2} + C\, e^{x^2}.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = -\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} + C\, e^{x^2}.$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 1$:

$$1 = -\frac{1}{4}\left(0^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-0} + C \ \Rightarrow \ 1 = -\frac{1}{8} + C \ \Rightarrow \ C = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$y = -\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} + \frac{9}{8}\, e^{x^2}.$$

□

Ejercicios 2.3.1 *Ecuaciones diferenciales lineales.* *Soluciones en la página 458*
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

1. $y' + 100y = 0$.
2. $x' - 10x = 0$.
3. $2z' - xz = 0$.
4. $xy' - 10y = 0$.
5. $(500 - t)s' + 4s = 0$.
6. $(100 + 3t)A' + A = 10$.
7. $y' + (\cot x)y = 2\csc x$, con $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
8. $(2x + 5)\dfrac{dy}{dx} + 10y = 10(2x + 5)$, con $y(0) = 0$.
9. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 6x$.
10. $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$.
11. $xy' = 2y + x^2$.
12. $y' \cos x + y \operatorname{sen} x - 1 = 0$.
13. $x^2y' + 2xy = x - 1$.
14. $(y - 1)x' - x = y(y - 1)^2$.
15. $xe^x y' + (x + 1)e^x y = 1$.
16. $y^2 dx + (3xy - 4y^3)dy = 0$.
17. $(x^2 + 1)\, dy = (x^3 - 2xy + x)\, dx$, con $y(1) = 1$.
18. $(y^2 + 1)dx = (1 + xy)dy$, con $x(1) = 0$.
19. $y' \cos x + y \operatorname{sen} x - \cos^3 x = 0$, con $y(0) = -1$.
20. $Ly' + Ry = E \operatorname{sen} wx$, con $y(0) = 0$,
 donde L, R, E & w son constantes positivas.

2.4 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

- Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

 $$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1\,.$$

 se denomina ecuación diferencial de Bernoulli.

 Es claro que si $r = 0$, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal

 $$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^0 \;\Rightarrow\; a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)\,.$$

 También si $r = 1$, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal

 $$\begin{aligned} a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y \;&\Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y - f(x)y = 0 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow a_0(x)y' + [a_1(x) - f(x)]y = 0 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow a_0(x)y' + h(x)y = 0\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 *Las siguientes ecuaciones diferenciales son de Bernoulli:*

1. $2y' + \dfrac{1}{x}y = x^2y^{-1}$; *donde* $r = -1$.
2. $y' - 2xy = x^3y^5$; *donde* $r = 5$.
3. $xy' + x^5y = xy^{\frac{1}{2}}$; *donde* $r = \dfrac{1}{2}$.
4. $5y^3\, dx - y^2(-2x + y^2x^4)\, dy = 0$.