Ejercicios 2.3.1 *Ecuaciones diferenciales lineales.* *Soluciones en la página 458*
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

1. $y' + 100y = 0$.
2. $x' - 10x = 0$.
3. $2z' - xz = 0$.
4. $xy' - 10y = 0$.
5. $(500 - t)s' + 4s = 0$.
6. $(100 + 3t)A' + A = 10$.
7. $y' + (\cot x)y = 2\csc x, \text{ con } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
8. $(2x + 5)\frac{dy}{dx} + 10y = 10(2x + 5), \text{ con } y(0) = 0$.
9. $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x$.
10. $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$.
11. $xy' = 2y + x^2$.
12. $y' \cos x + y \operatorname{sen} x - 1 = 0$.
13. $x^2 y' + 2xy = x - 1$.
14. $(y - 1)x' - x = y(y - 1)^2$.
15. $xe^x y' + (x + 1)e^x y = 1$.
16. $y^2 dx + (3xy - 4y^3)dy = 0$.
17. $(x^2 + 1)\, dy = (x^3 - 2xy + x)\, dx, \text{ con } y(1) = 1$.
18. $(y^2 + 1)dx = (1 + xy)dy, \text{ con } x(1) = 0$.
19. $y' \cos x + y \operatorname{sen} x - \cos^3 x = 0, \text{ con } y(0) = -1$.
20. $Ly' + Ry = E \operatorname{sen} wx, \text{ con } y(0) = 0$,
    donde L, R, E & w son constantes positivas.

2.4 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

- Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma

  $$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1\,.$$

  se denomina ecuación diferencial de Bernoulli.

  Es claro que si $r = 0$, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal

  $$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^0 \;\Rightarrow\; a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)\,.$$

  También si $r = 1$, entonces tenemos una ecuación diferencial lineal

  $$\begin{aligned} a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y \;&\Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y - f(x)y = 0 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0(x)y' + [a_1(x) - f(x)]y = 0 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0(x)y' + h(x)y = 0\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 *Las siguientes ecuaciones diferenciales son de Bernoulli:*

1. $2y' + \frac{1}{x}y = x^2 y^{-1}$; *donde* $r = -1$.
2. $y' - 2xy = x^3 y^5$; *donde* $r = 5$.
3. $xy' + x^5 y = xy^{\frac{1}{2}}$; *donde* $r = \frac{1}{2}$.
4. $5y^3\, dx - y^2(-2x + y^2 x^4)\, dy = 0$.

▼ En el caso de esta última ecuación diferencial, haciendo un poco de álgebra se puede llegar a una ecuación de Bernoulli:

$$
\begin{aligned}
5y^3\,dx - y^2(-2x + y^2x^4)\,dy = 0 \;&\Rightarrow 5y^3\frac{dx}{dy} - y^2(-2x + y^2x^4) = 0 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow 5y^3\frac{dx}{dy} = y^2(-2x + y^2x^4) \;\Rightarrow\; 5y^3\frac{dx}{dy} = -2y^2x + y^4x^4 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow 5y^3\frac{dx}{dy} + 2y^2x = y^4x^4,
\end{aligned}
$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli para x en función de y, con $r = 4$.

□

2.4.1 Resolución de la ecuación diferencial de Bernoulli

- Una ecuación diferencial de Bernoulli:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^r, \text{ con } r \neq 0, 1,$$

se puede convertir en una ecuación diferencial lineal realizando el siguiente procedimiento:

1. Si se multiplica la ED por y^{-r} se obtiene:

$$a_0(x)y^{-r}y' + a_1(x)y^{1-r} = f(x)\,. \tag{2.7}$$

2. Dado que se busca una ED lineal, esto nos sugiere el cambio de variable:

$$u = y^{1-r}\,. \tag{2.8}$$

3. Derivando con respecto a x:

$$u' = \frac{d}{dx}y^{1-r} = (1-r)y^{-r}y' \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-r}u' = y^{-r}y'\,. \tag{2.9}$$

Sustituyendo en (2.7) las dos condiciones anteriores (2.8) y (2.9), obtenemos:

$$\frac{a_0(x)}{1-r}u' + a_1(x)u = f(x).$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal para u en función de x. (La variable dependiente en este caso es u.)

4. Esta ecuación diferencial se resuelve con el método de la sección anterior. Posteriormente se reemplaza en la solución general obtenida la variable u usando $u = y^{1-r}$; obtenemos así la solución general de la ED original.

Ejemplo 2.4.2 *Resolver la ED* $2y' + \dfrac{1}{x}y = x^2y^{-1}$.

▼ En esta ED de Bernoulli se tiene que $r = -1$. Multiplicando por $y^{-r} = y^{-(-1)} = y$:

$$y\left(2y' + \frac{1}{x}y\right) = (x^2y^{-1})y \;\Rightarrow\; 2y'y + \frac{1}{x}y^2 = x^2\,. \tag{2.10}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = y^{1-r} = y^{1-(-1)} = y^2\,.$$

Derivando con respecto a x:

$$u' = \frac{d}{dx}y^2 = 2yy' .$$

Utilizando las dos condiciones anteriores en (2.10), obtenemos:

$$u' + \frac{1}{x}u = x^2 . \tag{2.11}$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal (para u en función de x) cuyo proceso de resolución se presenta a continuación:
Se tiene que $p(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculando un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} \;\Rightarrow\; \mu = e^{\ln x} = x .$$

Multiplicando por μ la ecuación diferencial (2.11) y aplicando la igualdad conocida:

$$x\left(u' + \frac{1}{x}u\right) = x^3 \;\Rightarrow\; (xu)' = x^3 .$$

Integrando:

$$\int (xu)'\,dx = \int x^3\,dx \;\Rightarrow\; xu + C_1 = \frac{1}{4}x^4 + C_2 \;\Rightarrow\; xu = \frac{1}{4}x^4 + C .$$

Despejando u y sustituyendo por y^2, se obtiene:

$$u = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x} \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}.$$

Esta última expresión es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli.

□

Ejemplo 2.4.3 *Resolver la ecuación diferencial* $\quad y' - 2xy = x^3y^5$.

▼ Se tiene una ED de Bernoulli con $r = 5$. Multiplicando por $y^{-r} = y^{-5}$:

$$y^{-5}(y' - 2xy) = (x^3y^5)y^{-5} \;\Rightarrow\; y^{-5}y' - 2xy^{-4} = x^3 . \tag{2.12}$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = y^{-4} .$$

Derivando con respecto a x:

$$u' = \frac{d}{dx}y^{-4} = -4y^{-5}y' \;\Rightarrow\; \frac{1}{-4}u' = y^{-5}y' .$$

Utilizando las dos condiciones anteriores en (2.12), obtenemos:

$$\frac{1}{-4}u' - 2xu = x^3 .$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal, la cual se resuelve a continuación.
Multiplicando por -4 para normalizar:

$$u' + 8xu = -4x^3 . \tag{2.13}$$

Se tiene que $p(x) = 8x$. Calculamos un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} \;\Rightarrow\; \mu = e^{\int 8x\,dx} = e^{4x^2} .$$

Multiplicamos por μ la ecuación diferencial (2.13) lineal y aplicamos la igualdad conocida:

$$e^{4x^2}(u' + 8xu) = -4x^3e^{4x^2} \;\Rightarrow\; \left(e^{4x^2}u\right)' = -4x^3e^{4x^2}.$$

Integrando:

$$\int \left(e^{4x^2}u\right)' dx = \int -4x^3e^{4x^2}\, dx\,. \tag{2.14}$$

Resolvemos la integral del lado derecho aplicando integración por partes.

$$\begin{aligned}
\int -4x^3e^{4x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int x^2e^{4x^2}8x\,dx = \\
-\frac{1}{2}\left(uv - \int v\,du\right) &= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{4x^2} - \int e^{4x^2}2x\,dx\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{4x^2} - \frac{1}{4}\int e^{4x^2}8x\,dx\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{4x^2} - \frac{1}{4}e^{4x^2}\right) + C_2 = \\
&= e^{4x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + C_2\,.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^2 & \Rightarrow & du = 2x\,dx; \\ dv = e^{4x^2}8x\,dx & \Rightarrow & v = e^{4x^2}. \end{array}}$$

Sustituyendo en (2.14), obtenemos:

$$e^{4x^2}u + C_1 = e^{4x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + C_2 \;\Rightarrow\; e^{4x^2}u = e^{4x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + C.$$

Despejando u y sustituyendo por y^{-4}:

$$u = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + Ce^{-4x^2} \;\Rightarrow\; y^{-4} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\right) + Ce^{-4x^2}\,,$$

que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli.

□

Ejemplo 2.4.4 *Resolver la ecuación diferencial* $xy' + x^5y = x^5y^{\frac{1}{2}}$.

▼ Para esta ecuación de Bernoulli se tiene que $r = \dfrac{1}{2}$. Multiplicando todo por $y^{-r} = y^{-\frac{1}{2}}$:

$$y^{-\frac{1}{2}}(xy' + x^5y) = (x^5y^{\frac{1}{2}})y^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; xy'y^{-\frac{1}{2}} + x^5y^{\frac{1}{2}} = x^5\,. \tag{2.15}$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = y^{1-r} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}\,.$$

Derivando con respecto a x:

$$u' = \frac{d}{dx}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \;\Rightarrow\; 2u' = y^{-\frac{1}{2}}y'\,.$$

Utilizando las dos condiciones anteriores en (2.15), obtenemos:

$$2xu' + x^5u = x^5,$$

que es una ecuación diferencial lineal. Para hallar la solución, dividimos entre $2x$ para normalizar:

$$u' + \frac{1}{2}x^4u = \frac{1}{2}x^4\,. \tag{2.16}$$

Encontramos que $p(x) = \dfrac{1}{2}x^4$. Calculamos un factor integrante $\mu(x)$:

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} \;\Rightarrow\; \mu = e^{\int \frac{1}{2}x^4\,dx} = e^{\frac{1}{10}x^5}\,.$$

Multiplicando por μ la ecuación diferencial lineal (2.16) y aplicando la igualdad conocida:

$$e^{\frac{1}{10}x^5}\left(u' + \frac{1}{2}x^4 u\right) = e^{\frac{1}{10}x^5}\frac{1}{2}x^4 \;\Rightarrow\; \left(e^{\frac{1}{10}x^5}u\right)' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{10}x^5}x^4\,.$$

Integrando:

$$\int \left(e^{\frac{1}{10}x^5}u\right)'\,dx = \frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{10}x^5}x^4\,dx\,. \tag{2.17}$$

Resolviendo la integral del lado derecho por sustitución:

$$\boxed{t = \frac{1}{10}x^5 \;\Rightarrow\; dt = \left(\frac{1}{2}x^4\right)dx.}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{10}x^5}x^4\,dx = \\
&= \int e^{\frac{1}{10}x^5}\frac{1}{2}x^4\,dx = \\
&\qquad = \int e^t\,dt = e^t = e^{\frac{1}{10}x^5} + C\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.17):

$$e^{\frac{1}{10}x^5}u = e^{\frac{1}{10}x^5} + C.$$

Despejando u y sustituyendo por $y^{\frac{1}{2}}$, obtenemos:

$$u = 1 + Ce^{-\frac{1}{10}x^5} \;\Rightarrow\; y^{\frac{1}{2}} = 1 + Ce^{-\frac{1}{10}x^5},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada.

□

Ejemplo 2.4.5 *Resolver la ecuación diferencial* $5y^3\,dx - y^2(-2x + y^2x^4)\,dy = 0$.

▼ Como vimos anteriormente [ejemplo 2.4.1, página (53)], considerando a y como la variable independiente, podemos transformar la ecuación diferencial en

$$5y^3\frac{dx}{dy} + 2y^2x = y^4x^4,$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli para x en función de y, con $r = 4$.
Multiplicamos por $x^{-r} = x^{-4}$:

$$x^{-4}\left(5y^3\frac{dx}{dy} + 2y^2x\right) = (y^4x^4)x^{-4} \;\Rightarrow\; 5y^3\frac{dx}{dy}x^{-4} + 2y^2x^{-3} = y^4\,. \tag{2.18}$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = x^{1-r} = x^{1-4} = x^{-3}\,.$$

Derivando con respecto a y:

$$u' = \frac{d}{dy}x^{-3} = -3x^{-4}x' \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}u' = x^{-4}\frac{dx}{dy}\,.$$

Aplicando las dos últimas condiciones en (2.18), se obtiene:

$$-\frac{5}{3}y^3u' + 2y^2u = y^4 .$$

que es una ecuación diferencial lineal, para u en función de y, cuya solución buscamos.
Ahora se divide entre $-\frac{5}{3}y^3$, para normalizar la ED

$$u' - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{y}\right)u = -\frac{3}{5}y . \tag{2.19}$$

Se tiene que $p(y) = -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{y}\right)$. Calculamos un factor integrante $\mu(y)$:

$$\mu = e^{\int p(y)\,dy} \;\Rightarrow\; \mu = e^{\int -\frac{6}{5}\frac{1}{y}\,dy} = e^{-\frac{6}{5}\int \frac{1}{y}\,dy} = e^{-\frac{6}{5}\ln y} = y^{-\frac{6}{5}} .$$

Multiplicando por μ la ecuación diferencial lineal (2.19) y aplicando la igualdad conocida:

$$y^{-\frac{6}{5}}\left(u' - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{y}u\right) = y^{-\frac{6}{5}}\left(-\frac{3}{5}y\right) \;\Rightarrow\; \left(y^{-\frac{6}{5}}u\right)' = -\frac{3}{5}y^{-\frac{1}{5}} .$$

Integrando:

$$\int \left(y^{-\frac{6}{5}}u\right)' dy = -\frac{3}{5}\int y^{-\frac{1}{5}}\,dy \;\Rightarrow\; y^{-\frac{6}{5}}u + C_1 = -\frac{3}{5}\frac{y^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C_2 \;\Rightarrow\; y^{-\frac{6}{5}}u = -\frac{3}{4}y^{\frac{4}{5}} + C .$$

Despejando u y sustituyendo por x^{-3} obtenemos:

$$u = -\frac{3}{4}y^2 + Cy^{\frac{6}{5}} \;\Rightarrow\; x^{-3} = -\frac{3}{4}y^2 + Cy^{\frac{6}{5}},$$

que es la solución general de la ecuación diferencial de Bernoulli.

□

Ejercicios 2.4.1 *Ecuaciones diferenciales de Bernoulli.* *Soluciones en la página 459*
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y' + y = xy^2$.
2. $y' - 3y = xy^{-4}$.
3. $x' - 3x = tx^3$.
4. $x' + \frac{1}{5}x = x^{-3}$.
5. $s' + 7s = rs^7$.
6. $r' - 2r = sr^{-1}$.
7. $x^2y' - xy = x^{-7}y^{\frac{1}{2}}$.
8. $x^3y' + x^2y = x^7y^{\frac{3}{4}}$.
9. $y' + xy = xy^2$.
10. $y' - x^2y = x^2y^{-4}$.
11. $3(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$.
12. $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$, con $y(1) = 1$.
13. $y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1$, con $y(0) = 4$.
14. $e^{-x}(y' - y) = y^2$.
15. $y^2\,dx + (xy - x^3)\,dy = 0$.